SEMESTRAL

UNI

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Inecuaciones polinomiales II y fraccionaria

Docente: Phflucker H. Coz

academiacesarvallejo.edu.pe

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \qquad a \neq 0$$

Ejemplos

- $5x^2 + 3x - 7 > 0$
- $x^2 - 10 \leq 0$

Resolución de la inecuación cuadrática

1) La inecuación cuadrática debe estar en su forma general y es conveniente que su coeficiente principal sea positivo ($a > 0$).
2) Calculamos el discriminante, según su resultado existen 3 casos.

Caso 3 $(\Delta < 0)$

Aplique el teorema de trinomio positivo y por simple inspección se obtiene el conjunto solución que puede ser $\mathbb{R}$ o $\emptyset$.

TEOREMA DEL TRINOMIO POSITIVO (TTP):

$$ax^2 + bx + c > 0 \,;\ \forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a > 0 \ \wedge \ \Delta < 0)$$

Ejemplo

Sea

$$P_{(x)} = 3x^2 + 4x + 5$$

Hallemos Δ

$$\Delta = 4^2 - 4(3)(5) \Rightarrow \Delta = -44$$

Por el teorema del trinomio positivo

Como:

$$a = 3 > 0 \quad \wedge \quad \Delta = -44 < 0$$

$$\longrightarrow P_{(x)} = \underbrace{3x^2 + 4x + 5}_{+} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

También tenga en cuenta lo siguiente:

$3x^2+4x+5<0 \longrightarrow CS=\phi$

(+)

$3x^2+4x+5\leq 0 \longrightarrow CS=\phi$

(+)

$3x^2+4x+5>0 \longrightarrow CS=\mathbb{R}$

(+)

$3x^2+4x+5\geq 0 \longrightarrow CS=\mathbb{R}$

(+)

Aplicación

Si $x^2-rx+\frac{21}{4}>-r\,;\ \forall x\in\mathbb{R}$,
halle la variación de r.

Resolución

Pasando todo al lado izquierdo

$$1.x^2-rx+\left(r+\frac{21}{4}\right)>0 \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Aplicando el teorema del trinomio positivo

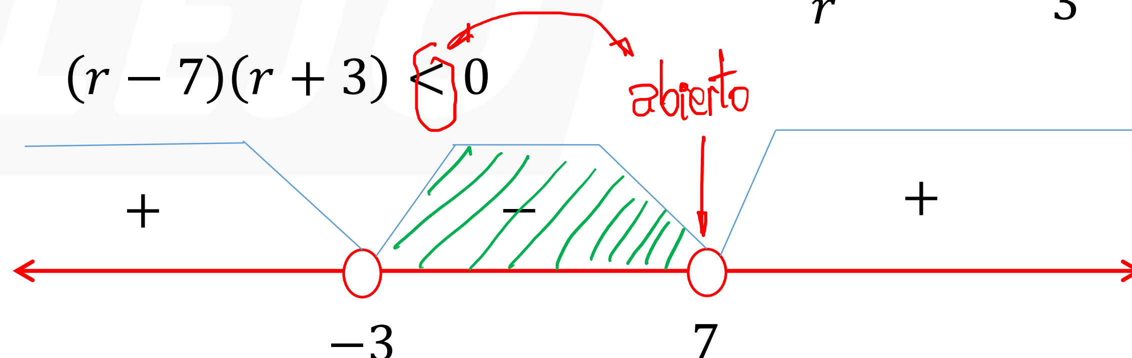
$$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0\,;\ \forall x\in\mathbb{R} \leftrightarrow (a>0 \wedge \Delta<0)}$$

$$(-r)^2-4(1)\left(r+\frac{21}{4}\right)<0 \implies r^2-4r-21<0$$

$r \qquad -7$

$r \qquad 3$

$$(r-7)(r+3)<0$$



$\therefore\ r\in\langle -3;7\rangle$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMA DEL TRINOMIO NO NEGATIVO

$$ax^2 + bx + c \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a > 0 \ \wedge \ \Delta \leq 0)$$

Aplicación

Determine la suma de valores enteros positivos de b si la inecuación cuadrática.

$$(1)\,x^2 - bx + 4 \geq 0\,,$$

Se cumple para todo x que pertenece a los reales.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 10

Resolución:

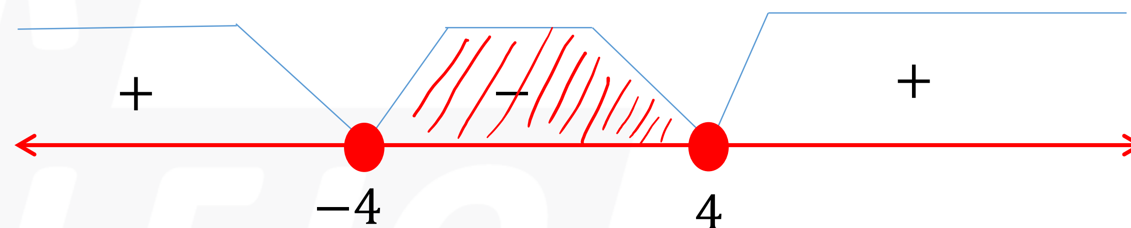
Aplicando el teorema del trinomio no negativo

$1 > 0 \ \wedge \ \Delta \leq 0$

$$(-b)^2 - 4(1)(4) \leq 0$$

$$b^2 - 16 \leq 0$$

$$(b+4)(b-4) \leq 0$$



Como b es entero positivo, tenemos

$b = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

Rta $1+2+3+4 = 10$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO SUPERIOR

Son aquellas inecuaciones polinomiales consideradas de grado mayor o igual a 3.

Ejemplos

- $x^3+5x^2-10x+4\leq 0$
- $x^4+x^3-x+3\leq 2x+1$

Su resolución

Se sugiere tratar de factorizar el polinomio, hasta obtener factores lineales o cuadráticos, de donde será fácil hallar las soluciones.

Ejercicio

Resolver la inecuación

$$x^3+3x^2-4x-12\leq 0$$

Resolución

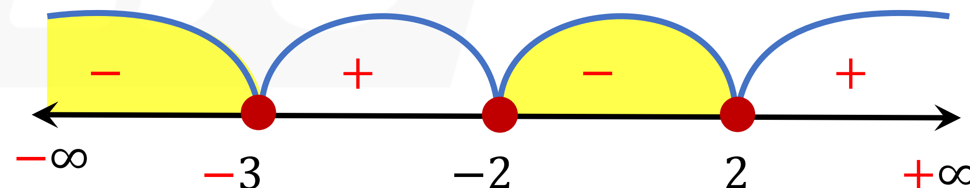
$$\underbrace{x^3+3x^2}-\underbrace{4x-12}\leq 0$$

$$x^2(x+3)-4(x+3)\leq 0$$

$$(x+3)(x^2-4)\leq 0$$

$$(x+3)(x-2)(x+2)\leq 0$$

Puntos críticos: $-3;2;-2$



$$\therefore \text{CS}=\langle-\infty;-3]\cup[-2;2]$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
60 Años

obs $A \subset A$

Aplicación

Determine el menor valor entero de n para que el $CS \subset \mathbb{R}^+$

$$x^3 - 2nx^2 + 2n^2x - n^3 > 0$$

incluido

A) 3 B) 2 C) 0 D) 1 E) −1

Resolución

Agrupando como se indica

$$(x^3 - n^3) - 2nx^2 + 2n^2x > 0$$

$$(x - n)(x^2 + x.n + n^2) - 2nx(x - n) > 0$$

$$(x - n)(x^2 - nx + n^2) > 0$$

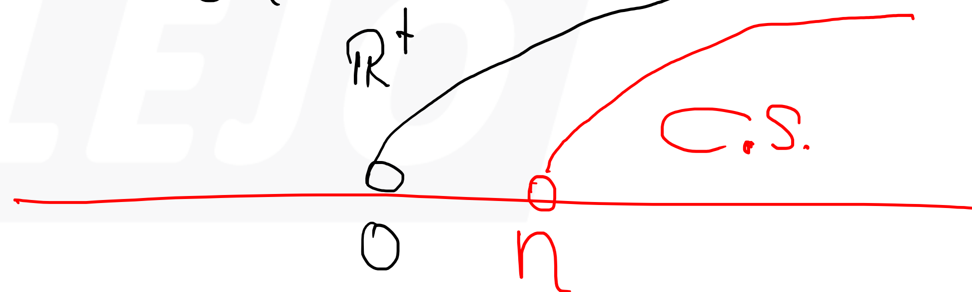
+

$\Delta = (-n)^2 - 4(1)(n^2)$

$\Delta = -3n^2$

$(x-n)((+)) > 0$

$x - n > 0$ de donde $x > n$



$n = 0; 1; 2; 3; \ldots$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMAS

Sea la inecuación polinomial, $P_{(x)} \gtrless 0$

Teorema 1

Si $P_{(x)}$ presenta un **factor positivo**, dicho factor **se puede cancelar** y **no cambia el sentido** de la desigualdad.

Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones

- $(x^2 + 4)(x - 6) \leq 0$

(x^2+4): $(+)$

$$x - 6 \leq 0$$

$$x \leq 6$$

$$\therefore \text{CS} = \langle -\infty; 6]$$

- $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 2x + 5) > 0$

$1 > 0 \wedge \Delta = (-)$

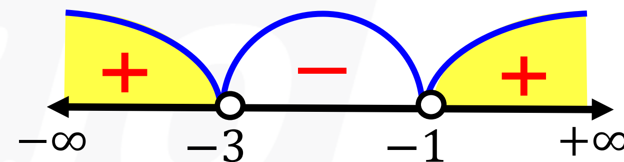
(x^2+2x+5): $(+)$ $\begin{cases} \text{coef. princ.} > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$x \quad 3$

$x \quad 1$

$$(x + 3)(x + 1) > 0$$

Puntos críticos: $-3; -1$



$$\therefore \text{CS} = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle -1; +\infty \rangle$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Teorema 2

Si $P_{(x)}$ presenta factores con **exponente IMPAR**, dicho exponente **se puede cancelar** y **no cambia el sentido** de la desigualdad.

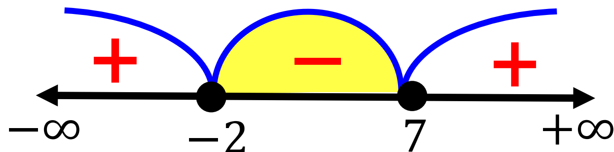
Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones

- $(x-7)^5(x+2) \leq 0$

$(x-7)(x+2) \leq 0$

Puntos críticos: $7; -2$

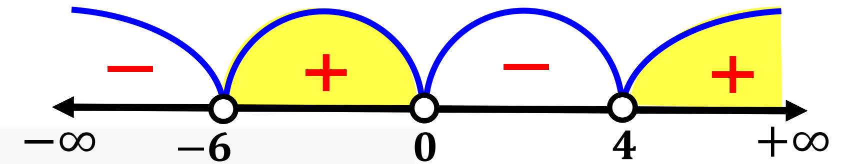


$\therefore CS = [-2; 7]$

- $(x+6)^3(x-4)x^7 > 0$

$(x+6)(x-4)x > 0$

Puntos críticos: $-6; 4; 0$



$\therefore CS = \langle -6; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Teorema 3

Cuando $P_{(x)}$ presenta factores con **exponente PAR,** se puede **cancelar dicho factor**, pero teniendo en cuenta lo siguiente:

Si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, se rescata la o las soluciones de los factores cancelados igualándolos esta a cero.

Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones

1) $(x-4)^2(x-1) \leq 0$

$x-1 \leq 0 \quad \vee \quad x-4=0$

$x \leq 1 \quad \vee \quad x=4 \qquad \therefore \text{CS} = \langle -\infty;1] \cup \{4\}$

2) $(x+3)^4(x-5)(x-8)^6 \geq 0$

$x-5 \geq 0 \quad \vee \quad x+3=0 \quad \vee \quad x-8=0$

$x \geq 5 \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad x=8$

$\therefore \text{CS} = [5;+\infty\rangle \cup \{-3\}$

Ya se encuentra en el CS

Si la desigualdad es $<$ o $>$, se rescata la o las restricciones obtenidas de los factores cancelados, indicando que estas deben ser diferente a cero.

Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones

1) $(x-5)^4(x-9) < 0$

$x-9 < 0 \quad \wedge \quad x-5 \neq 0$

$x < 9 \quad \wedge \quad x \neq 5 \qquad \therefore \text{CS} = \langle -\infty; 9\rangle - \{5\}$

2) $(x-6)^2(x-4)(x+1)^8 > 0$

$x-4 > 0 \quad \wedge \quad x-6 \neq 0 \quad \wedge \quad x+1 \neq 0$

$x > 4 \quad \wedge \quad x \neq 6 \quad \wedge \quad x \neq -1$

$\therefore \text{CS} = \langle 4; +\infty\rangle - \{6\}$

El CS no toma este valor

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INECUACIÓN FRACCIONARIA

Forma general

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \lessgtr 0$$

Donde:
$P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son polinomios
$°[Q_{(x)}] \geq 1$

Ejemplos

- $\dfrac{x+5}{x^2-2x-3} \geq 0$
- $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-4} < 0$

Teorema

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \lessgtr 0 \leftrightarrow P_{(x)} \cdot Q_{(x)} \lessgtr 0 \ \wedge \ Q_{(x)} \neq 0$$

Resolución de una inecuación fraccionaria

I. Garantizar la existencia de las fracciones y darle su forma general.

II. Aplique el teorema.

III. Reducir la inecuación obtenida usando la teoría de inecuaciones polinomiales para hallar su CS.

Aplicación

Resuelva la siguiente inecuación $\dfrac{x+3}{x-2} \leq \dfrac{x-2}{x+3}$

Resolución Pasando al lado izquierdo

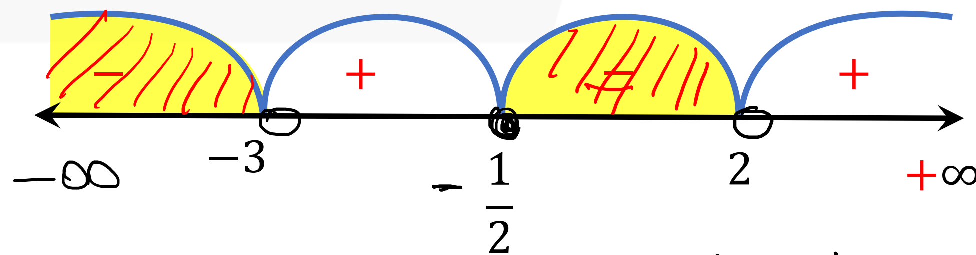
$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} \leq 0 \implies \frac{(x+3)^2-(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{10x+5}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

Condición de existencia
$x \neq 2; -3$

Aplicando el teorema

$(10x+5)(x-2)(x+3) \leq 0$ (cerrado) Puntos críticos: $-\dfrac{1}{2}; 2; -3$



C.S. $= \langle -\infty; -3 \rangle \cup [-\tfrac{1}{2}; 2 \rangle$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe